令和５年度 前期日程 入学試験問題 数学 D 解答例

以下は計算方法や論述の一例です。

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) (i)

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\log(x+2)-\log x\right\}=\lim_{x\to\infty}\log\left(\frac{x+2}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\log\left(1+\frac{2}{x}\right)=\log 1=\underline{0}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}x\left\{\log(x+2)-\log x\right\}&=\lim_{x\to\infty}x\log\left(\frac{x+2}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\log\left(1+\frac{2}{x}\right)^x\\&=\lim_{t\to 0}\log\left(1+t\right)^{\frac{2}{t}}\quad\left(t=\frac{2}{x}\right)\\&=\lim_{t\to 0}\log\left\{\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}\right\}^2=2\lim_{t\to 0}\log\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}\\&=2\log e=\underline{2}\end{aligned}$$

(2) (i)

$$\int_{-1}^{1}e^{3x+3}dx=\left[\frac{1}{3}e^{3x+3}\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{3}(e^6-e^0)=\underline{\frac{1}{3}(e^6-1)}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\int_1^4\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x}\,dx&=\int_1^4\frac{x+2\sqrt{x}+1}{x}dx=\int_1^4\left(1+\frac{2\sqrt{x}}{x}+\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^4\left(1+2x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{x}\right)dx\\&=\left[x+2\cdot\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}+\log x\right]_1^4=\left[x+4\sqrt{x}+\log x\right]_1^4\\&=(4+8+\log 4)-(1+4+\log 1)\\&=7+\log 4=\underline{7+2\log 2}\end{aligned}$$

(3) $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ の両辺を x で微分すると, $2x-\dfrac{2y\cdot y'}{4}=0$ となるので, $y\neq 0$ のとき, $y'=\dfrac{4x}{y}$ である。よって, 点 $(\sqrt{2},2)$ における接線の傾きは $\dfrac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$ となる。
従って, 接線の方程式は $y-2=2\sqrt{2}(x-\sqrt{2})$, すなわち $\underline{y=2\sqrt{2}x-2}$

2 (1) 2 次方程式 $x^2+2(m-1)x+2m^2-7=0$ の判別式を D とすると, $D>0$ であるような m の値の範囲を求めればよい。

$$D/4=(m-1)^2-1\cdot(2m^2-7)>0$$

より $(m+4)(m-2)<0$ となるので, $\underline{-4<m<2}$ である。

(2) (i) 整数 a を 14 で割ると余りが 9 より, $a=14q+9$ を満たす整数 q が存在する。すると, $a=14q+9=7(2q+1)+2$ となり, $2q+1$ は整数なので, a を 7 で割った余りは $\underline{2}$ である。

(ii) 整数 b を 7 で割ると余りが 5 より, $b=7q'+5$ を満たす整数 q' が存在する。すると,

$$\begin{aligned} a-2b &= (14q+9)-2(7q'+5) \\ &= 7(2q-2q')-1 \\ &= 7(2q-2q'-1)+6 \end{aligned}$$

$2q-2q'-1$ は整数であるので, $a-2b$ を 7 で割った余りは $\underline{6}$ である。

(3) 9 個の球をすべて区別して考える。9 個の球から 3 個取り出して左から右へ並べる順列の数は ${}_9\mathrm{P}_3$ である。このうち, 一番右側が白球である順列の数は $5\times{}_8\mathrm{P}_2$ である。従って, 求める確率は

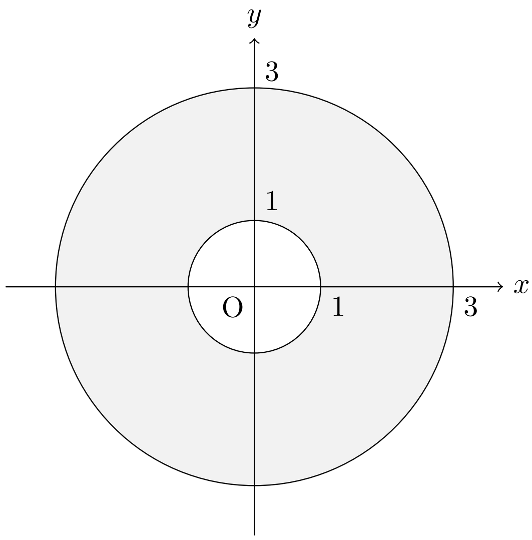
$$\frac{5\times{}_8\mathrm{P}_2}{{}_9\mathrm{P}_3}=\underline{\frac{5}{9}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 不等式 $(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9)<0$ が成り立つことは, 以下の連立不等式

$$\begin{cases} x^2+y^2-1>0 \\ x^2+y^2-9<0 \end{cases} \quad \cdots(*) \quad \text{または} \quad \begin{cases} x^2+y^2-1<0 \\ x^2+y^2-9>0 \end{cases} \quad \cdots(**)$$

が成り立つことと同じである。

連立不等式 $(**)$ は $9<x^2+y^2<1$ を表しているので, 明らかにこの不等式を満たす x, y は存在しない。従って, 連立不等式 $(*)$ が表す領域を図示すればよく, 原点中心で半径 1 の円の外部 $(x^2+y^2>1)$ と原点中心で半径 3 の円の内部 $(x^2+y^2<9)$ の共通部分が求める領域である。すなわち, 以下の灰色に塗られている部分である。ただし, 境界線は含まない。



(2) 真数 $x>0$ かつ $x-\dfrac{1}{2}>0$ の条件を満たす x の範囲は $x>\dfrac{1}{2}$ である。
$\log_{\frac{1}{2}} x+\log_{\frac{1}{2}}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=1$ より $\log_{\frac{1}{2}} x\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=1$ となり, $x\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$ を得る。よって $2x^2-x-1=(2x+1)(x-1)=0$ より, $x=-\dfrac{1}{2},1$ となる。真数の条件 $x>\dfrac{1}{2}$ より, $\underline{x=1}$ である。

(3) 点 P は 3 点 A, B, C が定める平面上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \ell\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

を満たす実数 k, ℓ が存在する, つまり

$$(-1, 1, t-1) = k(-1, 4, -1) + \ell(-2, -1, -1)$$

よって, 次の連立方程式が得られる。

$$\begin{cases} -k - 2\ell = -1 \\ 4k - \ell = 1 \\ -k - \ell = t - 1 \end{cases}$$

$k = \ell = \dfrac{1}{3}$ となるので, t の値は $t = 1 - k - \ell = \underline{\dfrac{1}{3}}$ となる。

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $0 \leqq x \leqq \pi$ より $\dfrac{\pi}{4} \leqq x + \dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{5}{4}\pi$ である。この範囲で $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$ を解くと, $x + \dfrac{\pi}{4} = \pi$ となるので, $x = \dfrac{3}{4}\pi$ である。

以上から, x 軸と交わる点の x 座標 p の値は $\underline{p = \dfrac{3}{4}\pi}$

(2) $0 \leqq x \leqq \dfrac{3}{4}\pi$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ である．よって, この範囲で, 曲線 $y = f(x)$, x 軸 および y 軸で囲まれた図形 D の面積 S は以下となる。

$$
\begin{aligned}
S = \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\, dx &= \left[-\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{3}{4}\pi} \\
&= -\left\{\cos\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(0 + \frac{\pi}{4}\right)\right\} \\
&= -\left\{(-1) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right\} = \underline{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}
\end{aligned}
$$

(3) 図形 D を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は以下となる。

$$
\begin{aligned}
V = \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \pi \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\, dx &= \pi \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \frac{1 - \cos 2(x + \frac{\pi}{4})}{2}\, dx \\
&= \pi \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \frac{1 - \cos(2x + \frac{\pi}{2})}{2}\, dx \\
&= \pi \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \frac{1 + \sin(2x)}{2}\, dx \\
&= \pi \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cos(2x)\right]_0^{\frac{3}{4}\pi} \\
&= \pi \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \cos(2x)\right]_0^{\frac{3}{4}\pi} \\
&= \pi \left\{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right) - \left(0 - \frac{1}{4} \cdot 1\right)\right\} \\
&= \pi \left\{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\pi - 0\right) - \left(0 - \frac{1}{4} \cdot 1\right)\right\} \\
&= \underline{\left(\frac{3}{8}\pi + \frac{1}{4}\right)\pi}
\end{aligned}
$$