令和5年度後期日程入学試験問題

# 数　学　C

## 理　学　部

**注意事項**

① 試験開始の指示があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

② 問題冊子は，3ページ(表紙，白紙を除く)です。試験開始後，確認しなさい。

③ 問題は，$\boxed{1}$から$\boxed{3}$まで3問あります。すべてに解答しなさい。

④ 解答は，別紙の解答用紙に記入しなさい。

⑤ 受験番号は，解答用紙の指定の欄に用紙ごとに正しく記入しなさい。

⑥ 各問題とも必ず解答の過程を書き，結論を明示しなさい。

# 数　学 $C$

**1** $i$を虚数単位とし，$0 \leqq \theta < 2\pi$とする。$z = \cos\theta + i\sin\theta$とし，$z$，$z^2$，$z^3$の虚部はすべて正であるとする。複素数平面において，7点$\mathrm{A}(1)$，$\mathrm{B}(z)$，$\mathrm{C}(z^2)$，$\mathrm{D}(z^3)$，$\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{z^3}\right)$，$\mathrm{F}\left(\dfrac{1}{z^2}\right)$，$\mathrm{G}\left(\dfrac{1}{z}\right)$を頂点とする七角形ABCDEFGの面積を$S(\theta)$とする。以下の各問に答えよ。

(1) $\theta$のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) $S(\theta)$を求めよ。

(3) $S(\theta)$が最大となる$\theta$の値を求めよ。

**2** 数列$\{a_n\}$の初項$a_1$から第$n$項$a_n$までの和$S_n$は次の式で表されるとする。

$$S_n = \frac{1}{2}(5n - 2022)(n+1) - 6 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

不等式$a_n \leqq 0$を満たす$n$の最大値を$p$とする。以下の各問に答えよ。

(1) 数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(2) $a_n$が7の倍数であり，かつ$n \leqq p$を満たす$n$の個数を求めよ。

(3) $q = p + 1$とし，$n \geqq q$を満たす$n$に対して

$$A_n = \frac{1}{a_{n+1}\sqrt{a_n} + a_n\sqrt{a_{n+1}}},\quad B_n = \frac{1}{\sqrt{a_n}} - \frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}$$

とする。次の等式が成り立つような定数$c$の値を求めよ。

$$A_n = cB_n \quad (n \geqq q)$$

また，和$D = A_q + A_{q+1} + A_{q+2} + \cdots\cdots + A_{2q}$を求めよ。

**3** $a$, $b$ を実数の定数とする。座標平面において，曲線 $y=-x^2$ を，$x$ 軸方向に $a$, $y$ 軸方向に $b$ だけ平行移動して得られる曲線を $C$ とし，直線 $y=x$ を $\ell$ とする。以下の各問に答えよ。

(1) 曲線 $C$ が直線 $\ell$ と $x$ 軸の両方に接するとする。定数 $a$, $b$ の値を求めよ。また，曲線 $C$, 直線 $\ell$, および $x$ 軸で囲まれた部分の面積 $S$ を求めよ。

(2) $a=2$，$b=4$ とする。曲線 $C$ の法線で，原点を通るものの方程式をすべて求めよ。

(3) $a=2$，$b=4$ とする。曲線 $C$ と直線 $\ell$ で囲まれた部分を，$y$ 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 $V$ を求めよ。